

# 复合单元法在变截面梁自由振动分析中的应用\*

吕中荣, 谢瑾荣, 刘济科  
(中山大学工学院, 广东 广州 510275)

**摘要:** 对复合单元法理论进行简单介绍, 利用该方法获得了多阶梯变截面梁和渐变截面梁的有限元动力分析方程。在此基础上通过求解广义特征值问题得到了梁的前几阶固有频率振型。在划分不同单元数目的情况下, 对利用复合单元法(CEM)和有限单元法(FEM)以及其他理论方法所得的固有频率进行比较, 进一步结合软件 ANSYS 求解的结果进行比较。数值仿真结果表明: 复合单元法具有计算量小、计算精度高的优点。因此, 在结构动力分析中有一定应用前景。

**关键词:** 复合单元法; 自由振动; 变截面梁; 固有频率

**中图分类号:** TB122 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2010)06-0049-04

## Composite Element Method for the Free Vibration Analysis of Non-uniform Beams

LÜ Zhongrong, XIE Jinrong, LIU Jike

(School of Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** A brief introduction to composite element method (CEM) is given. The finite element model is established by the composite element model for vibration analysis. The lowest few natural frequencies and the associated modeshapes are obtained from generalized eigenvalue analysis. Comparison is made for the results obtained from the CEM, FEM and other analytical methods. It was further verified by the results from ANSYS. The results show that the CEM has the advantages of computational efficiency and high accuracy. Studies indicates that the proposed method has the potential for application in structure vibration analysis.

**Key words:** composite element method; free vibration; beams with variable cross-section; natural frequencies

在工程结构中, 有很多可以简化成梁结构的形式, 或者本身就是梁。例如, 土木工程中的跨度桥梁结构; 机械工程中的转子轴承; 航空工程中的天线等。因此, 对梁的动力特性分析的研究在梁的设计和损伤检测中具有重要意义<sup>[1-2]</sup>。对梁的自由振动问题分析已有的方法很多, 有理论方法, 如 Rayleigh-Ritz 法<sup>[3]</sup>, Component Modal Analysis 法<sup>[4]</sup>, Green 函数法等<sup>[5]</sup>; 还有数值方法, 如有限元法<sup>[6-8]</sup>。众所周知, 利用有限元法要想得到较精准

的高阶固有频率和振型, 需划分较多的单元, 因而导致计算量较大。

本文利用复合单元法建立了多阶梯变截面和渐变截面梁的有限元分析方程<sup>[9-11]</sup>, 并进行了自由振动问题的分析。复合单元法的主要优点就在于其不但继承了有限单元法将结构离散化的思想, 又引入经典的振动分析中的特征函数, 二者相耦合。这样在保证一定计算精度的同时, 能使划分的单元数量明显减少, 从而可以减少计算量, 提高计算效率。

\* 收稿日期: 2009-11-16

基金项目: 广东省科技计划资助项目(2009B030803038, 2010A030200008), 教育部新教师基金资助项目(200805581018), 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(09lgpy08)

作者简介: 吕中荣(1975年生), 男, 博士, 副教授; E-mail: lvzhr@mail.sysu.edu.cn



$$m(x) = \begin{cases} \rho b h_1 & 0 \leq x < L_1 \\ \rho b h_2 & L_1 \leq x \leq L_2 \\ \vdots & \\ \rho b h_i & L_{i-1} \leq x \leq L_i \end{cases} \quad (14)$$

类似地，整体质量矩阵可表示为

$$M = \int_0^L S(x)^T m(x) S(x) dx = \begin{bmatrix} [m_{qq}] & [m_{qc}] \\ [m_{cq}] & [m_{cc}] \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中， $[m_{qq}]$  对应 FEM 中关于梁的质量矩阵， $[m_{qc}]$  对应  $q$  自由度和  $c$  自由度的耦合， $[m_{cq}]$  是  $[m_{qc}]$  的转置， $[m_{cc}]$  对应  $c$  的自由度。

得到整体刚度矩阵  $K$  和质量矩阵  $M$  后，梁无阻尼自由振动的特征方程表示如下

$$(K - \omega^2 M)V = 0 \quad (16)$$

由此可确定系统的固有圆频率  $\omega$  和相应的振型  $V$ 。

复合单元法的振型函数可表示为

$$\Phi = S(X)V \quad (17)$$

### 3 数值算例

算例 1：运用复合单元法与文献 [12] 中的应用实例分析结果比较，其中的悬臂梁结构和尺寸如图 1 所示。梁的物理参数为：密度  $\rho = 2\,664 \text{ kg/m}^3$ ，弹性模量  $E = 60.6 \text{ GPa}$ 。

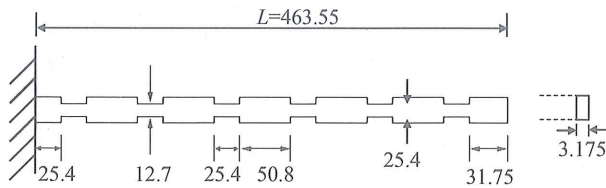


图 1 多变截面悬臂阶梯梁 (单位: mm)

Fig. 1 Beam with multiple steps (unit: mm)

采用本文方法计算的频率与文献 [12] 的比较见表 1 所列。由表可以看出，采用本文方法 208 个自由度的复合单元计算结果与文献 [12] 中 500 个自由度的理论值精度相当。表明本文方法具有自由度少，精度高的优点。

算例 2：进一步采用本文方法对一渐变截面梁的自由振动进行分析。计算的悬臂梁结构如图 2 所示。梁的高度沿着长度方向的变化假定为：

$$h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x}{2L}\right) \quad (18)$$

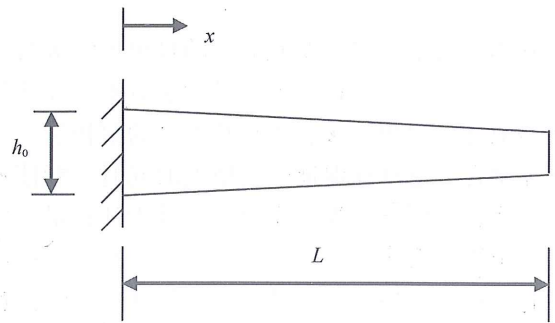


图 2 渐变截面悬臂梁模型

Fig. 2 Cantilever beam with varying cross section

梁的物理参数：密度  $\rho = 7\,800 \text{ kg/m}^3$ ，弹性模量  $E = 210 \text{ GPa}$ ，梁的宽度  $b = 20 \text{ mm}$ ，高度  $h_0 = 20 \text{ mm}$ ，总长  $L = 1\,200 \text{ mm}$ 。采用 4 个有限单元加 30 个  $c$ -DOF 的复合单元进行计算。并与 ANSYS 解进行比较。前六阶频率的比较如表 2 所列，由此可见，本文方法和 ANSYS 解符合得非常好，表明本文方法的正确性和有效性。

表 1 固有频率与文献 [12] 的比较<sup>1)</sup>

Table 1 Comparison on the natural frequencies with Ref. [12]

Mode	ANSYS [12]	Rayleigh-Ritz [12]	CMA [12]	本文方法 (CEM)				实验值 [12]
	Euler	Euler	Euler	CEM(1 × 100c)	CEM(1 × 200c)	CEM(4 × 100c)	CEM(4 × 200c)	
$\omega_{1B}$	10.758	10.752	10.816	10.784	10.770	10.786	10.768	10.63
$\omega_{2B}$	67.553	67.429	67.463	67.615	67.544	67.535	67.482	66.75
$\omega_{1C}$	54.699	54.795	54.985	56.7	55.084	56.432	54.799	49.38

1)  $\omega_{1B}$ ,  $\omega_{2B}$  分别代表第一阶和第二阶面外弯曲模态频率； $\omega_{1C}$  代表第一阶面内弯曲模态频率；

CEM (4 × 200c) 表示采用 4 个有限单元，200 个  $c$ -DOF，其他类推。

表 2 固有频率与 ANSYS 的解比较

Table 2 Comparison on the natural frequencies with results from ANSYS

固有频率	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶	6 阶
ANSYS (3D solid)	12.669	60.723	156.36	299.24	488.65	725.21
CEM (4 × 30c)	12.655	60.595	156.293	298.646	487.985	724.729

## 4 结 论

利用复合单元法对变截面梁的自由振动进行了分析,其主要优点就在于不但继承了有限单元法将结构离散化得思想,又引入级数形式的解析法,二者相互耦合。这样在保证一定精度的同时,能使划分的单元数量明显减少,从而大大减少计算量。本文的两个算例表明,通过复合单元法进行自由振动分析时,将大大减少计算量,同时保证一定的计算精度。

### 参考文献:

- [1] SINHA J K, FRISWELL M I, EDWARDS S. Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 251(1): 13-38.
- [2] LU Z R, LIU J K, HUANG M, et al. Identification of local damages in coupled beam systems from measured dynamic responses [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 326(1/2): 177-189.
- [3] BHAT R. B. Nature of stationarity of the natural frequencies at the natural modes in the Rayleigh-Ritz method [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 203(2): 251-263.
- [4] 李惠彬. 振动理论与工程应用 [M]. 北京:北京理工大学出版社, 2006.
- [5] KUKLA S, ZAMOJSKA I. Frequency analysis of axially loaded stepped beams by Green's function method [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 300: 1034-1041.
- [6] 李景涌. 有限元法 [M]. 北京:北京邮电大学出版社, 2002.
- [7] 吕中荣, 罗绍湘, 刘济科. 预应力对预应力梁响应的影响 [J]. *中山大学学报:自然科学版*, 2006, 45(2): 119-120.
- [8] 徐伟华, 吕中荣, 刘济科. 弱耦合系统模态局部化和频率曲线转弯现象 [J]. *中山大学学报:自然科学版*, 2007, 46(4): 9-12, 20.
- [9] 曾攀. 计算力学中的高精度数值分析新方法 - 复合单元法 [J]. *中国科学:E 辑*, 2002, 30(1): 39-46.
- [10] LU Z R, LAW S S. Discussions on "Composite Element Method for Vibration Analysis of Structure" [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 305(1/2): 357-361.
- [11] LU Z R, LAW S S. Dynamic Condition Assessment of a Cracked Beam with the Composite Element Model [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, 23(2): 415-431.
- [12] JAWORSKI J W, DOWELL E H. Free vibration of a cantilevered beam with multiple steps: Comparison of several theoretical methods with experiment [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 312(4/5): 713-725.